REVETEMENTS CYCLIQUES

par Hélène Esnault et Eckart Viehweg

Soient Y une variété algébrique, projective, lisse sur le corps des nombres complexe et Z une désingularisation d'un revêtement galoisien de Y. Nous décrivons ici les faisceaux des formes différentielles à pôles logarithmiques le long du diviseur de ramification dans Z dans le cas où le discriminant de Z sur Y n'est "pas trop mauvais" (§1). Dans le cas où Z est cyclique sur Y, on peut déterminer la filtration de Hodge de la structure de Hodge mixte affectée à la partie ouverte de Z complémentaire du diviseur de ramification, sans pour autant pouvoir déterminer la filtration par le poids. Dans (§3), on applique cette construction aux revêtements cycliques de $\mathbb{P}^2$ et l'on obtient ainsi par des méthodes algébriques certains invariants topologiques de la fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière. Les détails sont dans [4]. La symétrie des nombres de Hodge sur Z permet d'identifier la cohomologie de certains faisceaux inversibles sur Y avec celle de faisceaux de formes différentielles méromorphes, de sorte que des théorèmes d'annulation pour ces derniers s'interprètent en termes de théorèmes d'annulation pour ces faisceaux inversibles. Comme application, nous donnons dans (§2) une forme arithmétique du théorème d'annulation de Kodaira. Ceci fut le propos de l'exposé à Varenna du deuxième auteur. Les détails sont dans [7]. Le même théorème fut prouvé indépendemment et parallèlement par Y. Kawamata [5].

§1. <u>REVETEMENTS</u>

(1.1) <u>Notations</u>

(1.1.1) Un <u>diviseur</u> effectif D sur une variété complexe projective lisse Y est dit <u>à croisements normaux</u> si toutes ses composantes sont lisses et se coupent transversalement.

(1.1.2) Soient (Y,D) comme dans (1.1.1), $\tau : Y' \to Y$ un revêtement fini et galoisien tel que Y' soit normale, le discriminant $\Delta(\tau)$ soit contenu dans D, et $d : Z \to Y'$ une désingularisation de Y' telle que si $f : Z \to Y'$ désigne le morphisme composé, $f^{-1}(D) = D'$ soit un diviseur à croisements normaux. Un tel triplet $((Z,D'),Y',(Y(D))$ est dit <u>bon revêtement</u>.

(1.1.3) On dénote par $\Omega_Y^{\bullet}\langle D\rangle$ le <u>complexe des formes différentielles logarithmiques le long de</u> D, c'est-à-dire le complexe des formes différentielles holomorphes sur $Y-D$ qui ont au plus des pôles logarithmiques le long de D et par $W_n\Omega_Y^p\langle D\rangle$ la <u>filtration par le poids</u> de $\Omega_Y^p\langle D\rangle$ définie par les p-formes ayant au plus n pôles le long de D.

Lemme 1.2 [7] - *Soit* $((Z,D'),Y',(Y,D))$ *un bon revêtement. On a les inclusion* $f^* \Omega^p_Y\langle D\rangle \hookrightarrow \Omega^p_Z\langle D'\rangle$ et égalité $f_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle = \Omega^p_Y\langle D\rangle \otimes f_* \mathcal{O}_Z$

Lemme 1.3 - *Soit* $((Z,D'),Y',(Y,D))$ *un bon revêtement. Alors* $R^q d_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle = 0$ *et* $R^q f_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle = 0$ *pour* $q > 0$. *En particulier* $R^q d_* \mathcal{O}_Z = 0$ *pour* $q > 0$ *et* Y' *n'a que des singularités rationnelles.*

Ce dernier fait est bien connu et la démonstration de (1.3) se fait selon la ligne expliquée dans [8] .

Corollaire 1.4 - *Le morphisme* $\tau : Y' \to Y$ *est plat.*

Afin de prouver (1.3), on utilise le

Lemme 1.5 - *Soit* $((Z,D'),Y',(Y,D))$ *un bon revêtement tel que* $Y' = Y$. *Alors* $R^q f_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle = 0$ *pour* $q > 0$.

Ne connaissant pas d'autres références, nous donnons une démonstration de (1.5) qui se ramène à un résultat de P. Deligne [3] .

Remarque - Le paragraphe 2 n'utilise pas (1.3), au contraire du paragraphe 3. Dans ce cas particulier d'une surface, la démonstration peut se faire plus aisément à l'aide d'un "bon choix" de Z [4] .

Démonstration de (1.5) - Soit H un diviseur très ample tel que, en notant $H' = f^{-1}H$, $((H',H' \cap D'), \tau^{-1}H , (H,H \cap D))$ soit un bon revêtement. Notons F_p le conoyau de l'inclusion $f^* \Omega^p_Y\langle D\rangle \hookrightarrow \Omega^p_Z\langle D'\rangle$. On a $R^q f_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle = R^q f_* F_p$ pour $q > 0$. On se ramène au cas où les $R^q f_* F_p$ sont des faisceaux gratte-ciel en "coupant par H" de la façon suivante.
De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^p_Z\langle D'\rangle \otimes f^*\mathcal{O}(-H) \longrightarrow \Omega^p_Z\langle D'\rangle \to \Omega^p_Z\langle D'\rangle|_{H'} \to 0$$

on tire

$$R^q f_*(\Omega^p_Z\langle D'\rangle|_{H'}) = R^q f_* \Omega^p_Z\langle D'\rangle|_H \quad .$$

La suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{H'}(-H') \to \Omega^1_Z\langle D'\rangle|_{H'} \to \Omega^1_{H'}\langle D' \cap H'\rangle \to 0$$

induit la suite exacte

$$0 \to \Omega^{p-1}_{H'}\langle D' \cap H'\rangle \otimes \mathcal{O}_{H'}(-H') \to \Omega^p_Z\langle D'\rangle|_{H'} \to \Omega^p_{H'}\langle D' \cap H'\rangle \to 0 .$$

Fixons q et soit p_o le plus petit p tel que $R^q f_* \Omega_Z^p < D' > \neq 0$. Bien sûr $p_o > 0$, ce qui en fait importe peu. On a $R^q f_* \Omega_{H'}^p < D' \cap H' > = 0$ pour $p < p_o$ et $R^q f_* \Omega^{p_o}{}_{H'} < D' \cap H' > = R^q f_* \Omega^{p_o}{}_Z < D' > |_{H'}$.

On peut donc supposer que les $R^q f_* F_p$ sont concentrés en des points. Mais alors, si $H^q(F_p) = H^o(R^q f_* F_p) \neq 0$, on a $h^q(\Omega_Z^p < D' >) > h^q(\Omega_Y^p < D >)$, ce qui contredit [3, théorème 3.2.5] .

Démonstration de (1.3) - Le morphisme τ étant affine, il suffit de montrer la première égalité. L'assertion étant locale, on peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}\, A$ et $D_{réd} = \sum_1^r D_i$ est donné par les r premiers éléments $< f_1 \ldots f_r >$ d'un système régulier de paramètres de A . Notons m_i l'ordre de ramification en D_i de τ . La variété $\mathrm{Spec}\, A[f_i^{1/m_i}]_{1 \leq i \leq r}$ est régulière, de même, d'après le lemme d'Abhyankar, que la normalisée W de Y' dans $\mathbb{C}(Y')[f_i^{1/m_i}]_{1 \leq i \leq r}$. De plus, W est étale sur $Y' - \tau^{-1}D$. Soient W' la normalisée de Z dans $\mathbb{C}(W)$ et X une désingularisation de W' . On obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\delta} & W' & \xrightarrow{h} & W \\ & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Z & \xrightarrow{d} & Y' \end{array}$$

On peut supposer que $\Delta = \delta^{-1} g'^{-1} D'$ est un diviseur à croisements normaux. Alors $((X,\Delta),W',(Z,D'))$ est un bon revêtement, de même que $((X,\Delta),W',(W,g^{-1}\tau^{-1}D))$. Supposons maintenant par récurrence que pour tout bon revêtement $((Z,D'),Y',(Y,D))$ on ait $R^i d_* \Omega_Z^p < D' > = 0$ pour $0 < i < q$ et un p fixé, ou bien que $R^1 d_* \Omega_Z^p < D' > \neq 0$ (si $q = 1$). Dans tous les cas, on a une inclusion provenant de la suite spectrale de Leray

$R^q h_* (\delta_* \Omega_X^p < \Delta >) \hookrightarrow R^q(h \circ \delta)_* \Omega_X^p < \Delta >$, dont le deuxième membre est nul d'après (1.5). Comme g et g' sont affines, on a $g_* R^q h_* (\delta_* \Omega_X^p < \Delta >) = R^q d_* (g'_* (\delta_* \Omega_X^p < \Delta >)) = 0$. D'après (1.2), $\Omega_Z^p < D' >$ est un facteur direct de $g'_* \delta_* \Omega_X^p < \Delta >$. Donc $R^q d_* \Omega_Z^p < D' > = 0$.

Corollaire 1.6 - Soit $((Z,D'),Y',(Y,D))$ un bon revêtement.

Alors $H^q(Z, \Omega_Z^p < D' >) = H^q(Y, \Omega_Y^p < D > \otimes f_* \mathcal{O}_Z)$

(1.7)

Notons $D = \sum B_k + \sum \nu_j E_j$ la décomposition de D en composantes irréductibles de multiplicités 1 et ν_j . On pose $B = \sum B_k$, $E = \sum \nu_j E_j$, $M = \mathcal{O}(B)$ et on suppose qu'il existe un faisceau inversible L tel qu'une puissance positive N-ième vérifie $M = L^N \otimes \mathcal{O}(-E)$. L'inclusion $L^{-N} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y$ correspondante à D définit sur le faisceau de modules $\overset{N-1}{\underset{0}{\oplus}} L^{-i}$ une structure de $\mathcal{O}_Y$-algèbre. On considère par la suite des bons revêtements $((Z,D'),Y',(Y,D))$ pour lesquels Y' est la normalisée de $\mathrm{Spec}_Y(\overset{N-1}{\underset{0}{\oplus}} L^{-i})$. Un tel bon revêtement $f : Z \to Y$ est dit <u>extraction</u> N-<u>ième de</u> D. Le groupe de Galois de Y' sur Y est alors le groupe cyclique d'ordre N. Une racine primitive N-ième de l'unité, e, définit un automorphisme semi-simple sur $f_*\mathcal{O}_Z = \tau_* \mathcal{O}_{Y'}$, compatible à l'inclusion $\overset{N-1}{\underset{0}{\oplus}} L^{-i} \hookrightarrow \tau_* \mathcal{O}_{Y'}$. Ainsi $\tau_* \mathcal{O}_{Y'}$ admet une décomposition en somme directe de sous-faisceaux propres associés aux valeurs propres e^i, dont on peut supposer qu'ils contiennent L^{-i}, et qui sont inversibles. Appelons-les $L^{(i)^{-1}}$. Pour chaque nombre réel x, dénotons par $[x]$ sa partie entière.

<u>Lemme 1.8</u> [4] - <u>Soit</u> $f : Z \to Y$ <u>une extraction</u> N-<u>ième de</u> D .
<u>Alors</u> $f_* \mathcal{O}_Z = \overset{N-1}{\underset{0}{\oplus}} L^{(i)^{-1}}$ <u>où</u> $L^{(i)^{-1}} = L^i \otimes \mathcal{O}(-[\nu_j i/N]E_j)$.

En général, l'identification de la filtration par le poids des $\Omega^p_Z\langle D'\rangle$ en fonction de certaines filtrations sur la base Y est difficile. (Voir le cas des surfaces au paragraphe 3) . Pour le terme W_0 , on a des renseignements plus précis.

<u>Lemme 1.9</u> [7] - <u>Soit</u> $f : Z \to Y$ <u>une extraction</u> N-<u>ième de</u> D .
<u>Alors</u>,

i) <u>on a une inclusion</u>

$$f_*\Omega^p_Z \hookrightarrow \Omega^p_Y + \overset{N-1}{\underset{1}{\oplus}} \Omega^p_Y\langle D\rangle \otimes L^{(i)^{-1}} .$$

ii) <u>Si</u> D <u>est un diviseur lisse, donc en particulier</u> $E = 0$ <u>et</u> $L^{(i)} = L^i$, <u>cette inclusion est un isomorphisme</u>.

La démonstration de i) est donnée dans [7] . Pour ii), il suffit de remarquer qu'alors f est affine, D est isomorphe à D' et donc que

$$f_*\Omega^p_Z = \mathrm{Ker}(\overset{N-1}{\underset{0}{\oplus}} \Omega^p_Y\langle D\rangle \otimes L^{(i)^{-1}} \to \Omega^{p-1}D) .$$

<u>Théorème 1.10</u>. <u>Soit</u> $f : Z \to Y$ <u>une extraction</u> N-<u>ième de</u> D .

<u>Alors, pour</u> $1 \le i \le N-1$

i) $h^p(L^{(N-i)^{-1}}) \le h^0(\Omega^p_Y\langle D\rangle \otimes L^{(i)^{-1}})$

ii) <u>Si</u> D <u>est lisse, alors</u>

$h^q(\Omega_Y^p\langle D\rangle \otimes L^{-i}) = h^p(\Omega_Y^q\langle D\rangle \otimes L^{-N+i})$

Démonstration - ii) On peut choisir Z de telle sorte que $Z = \mathrm{Spec}(\bigoplus_0^{N-1} L^{-i})$. Une racine primitive N-ième e de l'unité définit un automorphisme de Z, qui fait de $f_*\Omega_Z^p$ (resp. $H^{p+q}(Z,\mathbb{C})$) un $\langle e\rangle$ -faisceau (resp. un $\langle e\rangle$ -module), dont on désigne par $(\ )_i$ le sous-faisceau (resp. sous-module) propre associé à e^i. On a $(f_*\Omega_Z^p)_i = \Omega_Y^p\langle D\rangle \otimes L^{-i}$. Par conjugaison, e^i et e^{N-i} sont échangés, donc de même $(H^{p+q}(Z,\mathbb{C}))_i$ et $(H^{p+q}(Z,\mathbb{C}))_{N-i}$. Donc $\overline{(H^q(Z,\Omega_Z^p))_i} = (H^p(Z,\Omega_Z^q))_{N-i}$ et $\overline{H^q(Y,\Omega_Y^p\langle D\rangle \otimes L^{-i})} = H^p(Y,\Omega_Y^q\langle D\rangle \otimes L^{-N+i})$

i) Bien que n'opérant que birationnellement sur Z, e opère sur les groupes de cohomologie $H^o(\Omega_Z^p)$ et $H^p(\mathcal{O}_Z)$, indépendants du modèle Z choisi. Donc $\overline{(H^o(\Omega_Z^p))_i} = (H^p(\mathcal{O}_Z))_{N-i}$ et (1.9 i)) $h^p(L^{(N-i)^{-1}}) \leq h^o(\Omega_Y^p\langle D\rangle \otimes L^{(i)^{-1}})$.

§2. THEOREMES D'ANNULATION

Théorème 2.1 [7] - Soit $f : Z \to Y$ une extraction N-ième de D. Si la dimension de Kodaira de $L^{(N-i)}$ vérifie $\kappa(L^{(N-i)}) = \dim Y = n$, alors $H^p(Y,L^{(i)^{-1}}) = 0$ pour $p < n$.

Démonstration - C'est une conséquence directe de (1.10 i)) et de l'annulation dans ce cas de $H^o(\Omega_Y^p\langle D\rangle \otimes L^{(N-i)^{-1}})$, que F. Bogomolov [2] prouve en utilisant que les formes différentielles globales à pôles logarithmiques sont fermées.

Remarque - De (2.1), on tire la forme classique du théorème d'annulation de Kodaira lorsque le diviseur D est ample.

En raisonnant par récurrence sur la dimension de Y et en utilisant (2.1), on obtient le

Lemme 2.2 [7] - Soient K et M deux faisceaux inversibles sur Y tels que pour toute courbe C sur Y, la première classe de Chern de M vérifie $c_1(M).C \geq 0$. Il existe alors des réels a_q strictement positifs vérifiant

$h^q(K \otimes M^m) \leq a_q.m^{n-q}$ pour $m > 0$.

A l'aide de (2.1) et (2.2) on peut démontrer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 2.3 [7] - Soit M un faisceau inversible sur Y de dimension n, dont la première classe de Chern vérifie $c_1(M)^n > 0$ et $c_1(M).C \geq 0$ pour toute courbe C sur Y. Alors $H^q(Y,M^{-1}) = 0$ pour $q < n$.

Démonstration - D'après (2.2) et le théorème de Riemann-Roch, M vérifie $\kappa(M) = \dim Y = n$. Un faisceau inversible ample H étant donné, il existe une puissance $N_1 > 0$ telle que $M^{N_1} = H \otimes \mathcal{O}(\sum \nu_j E_j)$, pour un diviseur effectif $\sum \nu_j E_j$ dont on peut supposer, après éclatement éventuel de Y, que c'est un diviseur à croisements normaux. En fait, pour une suite d'éclatements $\rho : X \to Y$, $\rho^* H^m \otimes \mathcal{O}(-F)$ est ample pour m grand et F un diviseur contenu dans le lieu exceptionnel de ρ. Cela dit, pour chaque $N_2 > 0$, $M^{N_2} \otimes H$ est ample et pour N_3 grand, on peut poser $(M^{N_2} \otimes H)^{N_3} = \mathcal{O}(B)$ pour un diviseur B régulier tel que $B + \sum N_3 \nu_j E_j$ soit un diviseur à croisements normaux. Il suffit alors d'appliquer (2.1) à $M = L$, $N = (N_1+N_2)N_3$ et de prendre N_2 suffisamment grand afin que $[N_3\nu_j/N] = 0$ et donc $L^{(1)^{-1}} = M^{-1}$.

§3. FIBRE DE MILNOR D'UN CONE SUR UNE COURBE PLANE

Soit C une courbe plane réduite d'équation f et X la fibre de Milnor correspondante : $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / f(x,y,z) = 1\}$. Nous montrons ici brièvement comment utiliser le paragraphe 1 dans l'étude des invariants topologiques suivants de X : nombres de Betti $b_k(X)$, rang, signature de la matrice intersection sur $H^2(X,\mathbb{C})$. Ceux-ci sont exprimables en termes du degré N, du nombre de composantes r et d'invariants locaux de C que l'on définit en liaison avec la structure de Hodge mixte portée par les $H^k(X,\mathbb{C})$. Ces derniers sont lisibles sur la désingularisation plongée de C au voisinage d'un point singulier. Nous mentionnons aussi comment à notre sens on pourrait utiliser le paragraphe 1 dans la recherche de courbes planes C pour lesquelles, degré, nombre de composantes et singularités locales étant fixées, $b_1(X)$, et donc aussi le groupe fondamental du complémentaire de C dans $\mathbb{P}^2$, "sautent" en fonction de la position des singularités, c'est-à-dire, en d'autres termes, d'exemples "à la Zariski".

(3.1) - Soit $\sigma : Y \to \mathbb{P}^2$ la désingularisation plongée de C. On a $\sigma^* C = D = \sum_1^r B_k + \sum \nu_j E_j$, où le diviseur $B = \sum_1^r B_k$ est la normalisation de C et D est à croisements normaux. On pose $L = \sigma^* \mathcal{O}(1)$ et Y' la normalisation de $\mathrm{Spec}_Y(\bigoplus_0^{N-1} L^{-i})$ où la structure de $\mathcal{O}_Y$-algèbre du faisceau de modules $\bigoplus_0^{N-1} L^{-i}$ est donnée par la section de L^N correspondante à D. On construit alors comme dans (1.7) une extraction N-ième de D, $f : Z \to Y$. En fait, Z est une compactification lisse de la fibre de Milnor X dont le bord $D' = Z-X$ est un diviseur à croisements normaux.

Proposition 3.2 [4] - On a $b_2(X) = b_1(X) + (N-1)^3 - N \sum \mu_p$, où μ_p est le nombre de Milnor de C au point p .

Démonstration - On applique le théorème suivant de P. Deligne [3 , page 35] . Il existe une suite spectrale de terme $E_1^{pq} = H^q(Z,\Omega_Z^p < D' >)$ qui converge vers $H^{p+q}(X,\mathbb{C})$ et dégénère en E_1 . Au regard de (1.6) et (1.8) on obtient donc $b_2(X) = \sum_{p+q=2} \sum_0^{N-1} h^q(\Omega_Y^p < D > \otimes L^{(i)^{-1}})$. De plus $b_k(X) = 0$ si $k \geq 3$. On applique le théorème de Riemann-Roch. Il faut identifier $h^o(\Omega_Y^1 < D >)$, ce que l'on fait à l'aide de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow \Omega_Y^1 < D > \longrightarrow n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}} \longrightarrow 0 \text{ , où } n : \tilde{D} \longrightarrow D_{réd}$$

est la normalisation du diviseur réduit $D_{réd}$; ce qui donne $h^o(\Omega_Y^1 < D >) = r-1$. On obtient la formule

$$b_2(X) = b_1(X) + (N-1)^3 + N/2. \sum (\nu_j - a_j - 1)E_j \sum (\nu_j - 1)E_j - \sum \delta_p$$

où $\sigma^* \mathcal{O}(-3) \otimes \mathcal{O}(\sum a_j E_j)$ est le diviseur canonique de Y et δ_p le conducteur de C en p défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \sigma_* \mathcal{O}_B \longrightarrow \sum \mathbb{C}^{\delta_p} \longrightarrow 0 .$$

Ceci permet de conclure en utilisant la formule de N.A'Campo [1] exprimant le nombre de Milnor de C en p en fonction des ν_j .

Pour décrire la structure de Hodge mixte sur $H^2(X,\mathbb{C})$, on applique le théorème de P. Deligne [3 , page 38] . Il existe une suite spectrale de terme $E_1^{-n,k+n} = H^k(Z, Gr_n^W \Omega_Z^p < D' >)$ qui dégénère en E_2 et converge vers $H^k(Z,\Omega_Z^p < D' >)$. Ce qui donne ici, en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega_Z^1 \longrightarrow \Omega_Z^1 < D' > \longrightarrow n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'} \longrightarrow 0 \text{ , où}$$

$n : \tilde{D}' \rightarrow D'_{réd}$ est la normalisation du diviseur réduit $D'_{réd}$:

(3.3)

$$W_0 H^2(X,\mathbb{C}) = H^o(\Omega_Z^2) + H^1(\Omega_Z^1)/Im(H^o(n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \rightarrow H^1(\Omega_Z^1)) + H^2(\mathcal{O}_Z)$$

$$Gr_1^W H^2(X,\mathbb{C}) = Ker(H^o(Gr_1^W \Omega_Z^2 < D' >) \rightarrow H^1(\Omega_Z^2)) + Ker(H^1(n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \rightarrow H^2(\Omega_Z^1))$$

$$Gr_2^W H^2(X,\mathbb{C}) = Ker(H^o(Gr_2^W \Omega_Z^2 < D' >) \rightarrow H^1(Gr_1^W \Omega_Z^2 < D' >))$$

(3.4) Le terme $H^{11} = H^1(\Omega_Z^1)/Im(H^o(n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \rightarrow H^1(\Omega_Z^1))$ de $W_o H^2(X,\mathbb{C})$ est inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{11} \longrightarrow H^1(\Omega_Z^1 < D' >) \longrightarrow H^1(n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \longrightarrow H^2(\Omega_Z^1) \longrightarrow 0$$

De même le terme $H^{10} = \mathrm{Ker}(H^1(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \to H^2(\Omega^1_Z))$ de $Gr_1^W H^2(X,\mathbb{C})$ est inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{10} \longrightarrow H^1(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \longrightarrow H^2(\Omega^1_Z) \longrightarrow 0 .$$

De sorte qu'il suffit d'identifier $H^1(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'})$ pour obtenir la W-filtration de $H^2(X,\mathbb{C})$.

(3.5) Posons $d_j = \langle N,\nu_j \rangle$ le dénominateur commun à N et ν_j et $d_{jk} = \langle N,\nu_j,\nu_k \rangle$ celui à N, ν_j et ν_k . Introduisons les invariants suivants.

$$\beta_1 = \sum (d_j-1)E_j \sum(\nu_j-1)E_j$$

$$\beta_2 = \sum (d_j-1)(E_j^2+2)$$

$$\beta_3 = \sum_{j<k} E_j.E_k(d_{jk}-1) - \sum \varepsilon_{B.E_j} B_j$$

avec

$\varepsilon_{B.E_j} = 1$ si $B.E_j = 0$ et 0 sinon

B_j = cardinal $\{i/1 \leq i \leq d_j-1$ et $i\nu_k/d_j$ est entier pour tout k tel que $E_j.E_k \neq 0\}$.

Lemme 3.6 4 - Avec les notations de (3.5), on a

$$h^1(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'}) = r-1 + (N-1)(N-2)/2 - \sum \delta_p - (\beta_1+\beta_2)/2 - \beta_3 .$$

Remarque - En fait, les composantes exceptionnelles de $d : Z \to Y'$ ne jouent aucun rôle pour ce qui concerne la structure de Hodge mixte de $H^2(X,\mathbb{C})$. Elles n'apparaissent ni dans le H^{11} de $W_0H^2(X,\mathbb{C})$ puisqu'elles sont à la fois dans $H^1(\Omega^1_Z)$ et dans $\mathrm{Im}(H^0(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \longrightarrow H^1(\Omega^1_Z))$, ni dans $H^1(n_*\mathcal{O}_{\tilde{D}'})$.

Démonstration - Le terme $H^1(\mathcal{O}_B)$ étant connu, il suffit en fait d'évaluer quel type de revêtement de la composante E_k donne l'extraction N-ième de D . Pour cela, on remarque qu'à une ramification totale près, on extrait la racine d_k-ième du diviseur $B + \sum_{j\neq k} \nu_j E_j$. On applique alors (1.8), puis le théorème de Riemann-Roch aux faisceaux obtenus. Les invariants β_i introduits permettent d'exprimer la trivialité de ces faisceaux qui sont négatifs.

(3.7) On définit sur la cohomologie à support compact $H_c^2(X,\mathbb{C})$ la matrice intersection q de la façon usuelle, dont rang et signature s'expriment en fonction des nombres de Hodge sur les gradués $Gr_n^W H^2(X,\mathbb{C})$ [6] .

Théorème 3.8 [4] - On a

$$\dim W_oH^2(X,\mathbb{C}) = \text{rang } q = (N-1)(N^2-3N+3) + 2b_1(X) - 2(r-1) - (N-1)\sum \mu_p + (\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$

$$\text{signature } q = -(N-1)(N^2+N-3)/3 + (N-1)\sum \mu_p + 2\sum_1^{N-1}(\sum [\nu_j i/N]E_j)^2 +$$

$$+ (N-1)\sum(\nu_j-1)(E_j^2+2) - \beta_1 - \beta_3 .$$

Remarque - On voit donc que tous les invariants topologiques calculés dépendent, outre de N , r et d'invariants locaux de C , du premier nombre de Betti $b_1(X)$. Ce dernier est l'objet de ce qui suit.

Proposition 3.9 [4] - Si la dimension de Kodaira de $L^{(i)}$ vérifie $\kappa(L^{(i)}) = 2$ pour $1 \leq i \leq N-1$, alors $b_1(X) = r-1$.

Démonstration - On applique (1.6), (1.8), (2.1), puis il faut calculer $h^0(\Omega_Z^1 < D' >)$ en fonction de $h^0(\Omega_Z^1)$, ce que l'on fait en calculant le nombre de composantes algébriquement indépendantes à support dans D' , qui donnent une contribution non nulle à $\text{Im}(H^0(n_* \mathcal{O}_{\tilde{D}'}) \longrightarrow H^1(\Omega_Z^1))$. On a $h^0(\Omega_Z^1 < D' >) = h^0(\Omega_Z^1) + r-1$.

Lemme 3.10 [4] - En particulier, si tous les ν_j sont premiers à N , alors $b_1(X) = r-1$.

Remarque - C'est aussi une conséquence de la dualité de Serre appliquée à $H^2(\Omega_Y^1 < D > \otimes L^{(i)^{-1}}) = 0$.

Sous les hypothèses de (3.10), on obtient une forme particulièrement simple de rang q.

(3.11) En général on a $b_1(X) = r-1 + 2\sum_1^{N-1} h^1(L^{(i)^{-1}})$. En appliquant la suite spectrale de Leray, on trouve

$$h^1(L^{(i)^{-1}}) = \text{Coker}(\sum \mathbb{C}^{m_p} \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(i-3)) \text{ , avec}$$

$$- m_p = [\nu_j i/N] + \sum [\nu_j i/N]([\nu_j/N]+1)/2.E_j^2 + \sum_{j<k}[\nu_j i/N][\nu_k i/N]E_j.E_k ,$$

cette somme étant évaluée sur les E_j au-dessus du point singulier p .
En particulier, $b_1(X)$ dépend du nombre de courbes de degré i-3, pour $1 \leq i \leq N-1$, passant par les points p avec la multiplicité m_p .

(3.12) Prenons l'exemple de Zariski. C'est une courbe de degré 6 avec 6 cusps comme singularités. On a

$$R^1\sigma_* L^{(i)^{-1}} = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \text{ et } (R^1\sigma_* L^{(5)^{-1}})_p = \mathbb{C} .$$

Donc $h^1(L^{(5)^{-1}}) = \mathrm{Coker}(\sum_1^6 \mathbb{C} \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(2))$ et $b_1(X) = 0$ si les 6 cusps ne sont pas une conique
$= 2$ s'ils le sont ,

Références

[1] A'Campo, N — La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helvetici, 50, (1975), 233-248.

[2] Bogomolov, F — Unstable vector bundles and curves on surfaces, Proc. Int. Congress of Maths, Helsinki, (1978), 517-524.

[3] Deligne, P — Théorie de Hodge II, Pub. Math. I.H.E.S., 40, 5-57.

[4] Esnault, H — Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière, manuscrit.

[5] Kawamata, Y — A generalization of Kodaira-Ramanujam's Vanishing theorem, Manuscrit.

[6] Steenbrink, J — Intersection form for quasi-homogeneous singularities, Comp. Math., 34, fasc. 2 (1977)

[7] Viehweg, E — Vanishing theorems. Manuscrit.

[8] Viehweg, E — Rational singularities of higher dimensional schemes, Proc. of the A.M.S., 63, (1977).

Hélène Esnault
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France

Eckart Viehweg
Institut für Mathematik
und Informatik
A 5, Seminargebäude
D-68 Mannheim
République Fédérale Allemande