Arbeitsgemeinschaft zu Hilbertschen Modulformen

Organisation: G. Böckle, C. Diem, G. Frey, M. Möller Di 10–12 c.t., ES09

Seminarprogramm

Das Seminar will eine Einführung in die Theorie der Hilbertschen Modulformen geben. Es geht weniger darum, ein großes Resultat am Ende zu beweisen, sondern zu sehen, dass es auch außer den klassischen Modulformen interessante und gut zugängliche Verwandte gibt. An einigen Beispielen wird klar werden, dass es wichtige Zusammenhänge zur Arithmetik von total reellen Zahlkörpern gibt. Das Seminar hat nicht den Anspruch zur 'forefront of current research' vorzudringen. Daher werden viele tiefen Zusammenhänge wenn überhaupt, so nur andeutungsweise erkennbar sein.

Zunächst wird es darum zu gehen, ein Analogon von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ zu für Arithmetische Gruppen total reeller Zahlkörper kennenzulernen, und elementare Aussagen und Eigenschaften korrespondierender Modulformen zu zeigen. Das letztliche Ziel ist es, Modulformen als geometrische Objekte zu interpretieren, d.h., als Schnitte von Geradenbündeln über einem geeigneten Modulraum. Dies Bedarf einiger Hilfsmittel: Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$, reelle Multiplikation auf solchen, explizite Konstruktion, ihr Modulraum, und auch eine Einführung in diese Modulthematik über beliebigen Grundkörpern. Zum Abschluss wird die geometrische Interpretation gegeben. Diese ist die Basis einer großen Zahl weiterer Anwendungen.

Wir werden uns im wesentlichen an einigen Kapiteln des schönen Buchs von Goren orientieren. Die Vorträge am Anfang erhalten zusätzliche Literatur in den Büchern von Freitag und Garrett. *Es wäre sicher für die späteren Vorträge einfacher, wenn auch die Vortragenden am Anfang bereits die Notation aus Goren wählen, auch wenn sie inhaltlich der Darstellung aus Freitag beziehungsweise Garrett folgen.*

Die Themen für die letzten Vorträge sind noch offen.

12.04.05 **1. Einführung (u. Organisatorisches)**

Gebhard Böckle

19.04.05 **2. Diskrete Untergruppen von** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$

Hier geht es um elementare Grundlagen für eine topologisch sinnvolle Operation einer diskreten Gruppe auf einem 'geometrischen' Raum. Wesentlich sind [Fr], Prop. 2.1, eine Diskussion von Spitzen, die Topologie auf $(\mathbb{H}^n)^*$ und $\Gamma\backslash(\mathbb{H}^n)^*$, Fundamentalmengen und Spitzensektoren, und die Singularität des Quotienten in den Spitzen.

Lit.: *Freitag*, I,1-2.

R. Butenuth

26.04.05 **3. Die Hilbertsche Modulgruppe**

Zunächst soll durch eine Diskussion der elliptischen Punkte auf $(\mathbb{H}^n)^*$ kurz [Fr], I.2, zuende geführt werden. Danach geht es vor allem um die Anwendung auf die Hilbertsche Gruppe $\Gamma_L := \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_L)$. (Aussagen 3.4-3.7 in [Fr], Kap. I). Am Ende des Vortrags sollen noch 3.3. (Kongruenzuntergruppen), und 3.8, 3.9 behandelt werden, sowie das Konzept eines Siegelbereichs ([Ga], 1.6), welches im wesentlichen schon im Vortrag 2 behandelt worden war.

Lit.: *Freitag* I.2, I.3; *Garrett*, I.1, 1.3, 1.6.

X. Taixes

03.05.05 **4. Automorphe Formen**

Definition, Fourierentwicklung, Spitzenformen, Formen vom Gewicht Null, das Köcher-Prinzip und erste Folgerungen. Im wesentlichen wird empfohlen, der Darstellung in [Go], II.3 zu folgen. Details finden sich auch in [Fr] I.4. Wenn möglich, sollen auch noch kurz die Resultate in [Fr], I.4.10-14 behandelt werden. (nur für Kongruenzuntergruppen von Γ_L).
Lit.: *Goren*, II.2.3, *Freitag* I.4; *Garrett* I.2.

K. Rülling.

10.05.05 **5. Eisensteinreihen**

Definition, Konvergenz, Fourierentwicklung; Resultate auch für Kongruenzuntergruppen. Wieder sollte notationell der Quelle [Go], II.4.1 gefolgt werden. Von Satz 4.4 soll, unter Verwendung der anderen Quellen möglichst viel gezeigt werden. Auch die Abschnitte nach II, Thm. 4.4 in II.4.1 sollten behandelt werden.
Lit.: *Goren*, II.4.1, *Garrett*, 1.5, 1.8.; *Freitag*, 1.5, Teil 2.

F. Heinloth

24.05.05 **6. Integrationstheorie**

Dieser Abschnitt dient u.a. dazu, die Integrationstheorie auf $\Gamma\backslash(\mathbf{H}^n)^*$ sauber zu begründen. Behandelt werden sollten Haarmaße, Maße auf Quotientenräumen, $\zeta_F(2)$ "als" Volumen von $\Gamma\backslash(\mathbf{H}^n)^*$ und das Petersson Skalarprodukt, im Umfang von [Ga], 1.10-12. Wer einen anderen Schwerpunkt setzen will, könnte auch über die Zuordnung von L-Funktionen zu Hilbertschen Modulformen, [Ga], 1.9, berichten, und dafür bei den anderen Themen einige technische Teile kürzen.
Lit: *Garrett*, 1.10, 1.11, 1.12, evtl. 1.9

C. Rhode

Ab nun folgen wir dem Buch von Goren.

31.05.05 **8. Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$, Teil I**

Ganz kurz: komplexe g-dimensionale Tori. Ausführlich den Abschnitt 6.1. mit Appel-Humbert. Zentral ist der Begriff einer Riemannform. Als Beispiel kurz: 1. Hälfte von I.6.44
Lit.: *Goren*, I.6.1, *Debarre*

O. Ledesma

7.06.05 **9. Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$, Teil II**

Die duale Abelsche Varietät, der Begriff (Haupt-)Polarisierung, die Riemannform das duale Gitter, und der Grad einer Polarisierung. Die Rosati-Involution. (Die Klassifikation auf S.46 kurz anschneiden aber natürlich ohne Beweise.) Anschliessend I.6.44 zu Ende führen. Kurze Einführung in total reelle Körper (II.1.). Zum Abschluss die Definition einer Abelschen Varietät mit RM. (bis Ende II.2.1)
Lit.: *Goren*, I.6.2 - II.2.1, *Debarre*

B. Buth

14.06.05 **10. Der Modulraum komplexer Abelscher Varietäten über $\mathbb{C}$ mit reeller Multiplikation**

Dies ist ein sehr zentraler Vortrag. Man beachte, dass 2.22 und 2.23 bereits, eventuell in teilweise anderer Sprache, in früheren Vorträgen behandelt worden war.
Lit: *Goren* II.2.2

M. Blickle

21.06.05 **11. Geometrische Konstruktionen von Modulformen**

Vortrag 10 zeigt, dass die Hilbertschen Modulformen, 'irgendwie' mit dem Modulraum von Abelschen Varietäten mit reeller Multiplikation zusammenhängen. (Genaueres später.) Hat man also eine Abbildung zwischen solchen Modulräumen, so bietet es sich an den Pullback auf Modulformen anzuwenden. Dazu gibt es in [Go], II.5, II.6 und II.4.2 einige gute Beispiele. (Man kann sie durchaus in dieser Reihenfolge präsentieren.)

Lit: *Goren*, II.4.2–II.6

C. Diem

28.06.05 **12. Hilbertsche Modulformen als Schnitte von Geradenbündeln**

Formulierung eines Modulproblems von AV mit RM und Niveau-Struktur über beliebiger Basis S (Goren III.5 und vor allem III.6.1); am einfachsten mit voller Niveau-n-struktur, und über einer Basis S in der n invertierbar ist. Wenn's nicht anders geht, muss man eben mit minimalen Vorbereitungen auch μ_n-Strukturen einführen. Auf dem Modulraum existieren g universelle Geradenbündel. Es soll nun gezeigt werden, dass nach Basiswechsel zu $\mathbb{C}$ die globalen Schnitte der verschiedenen Tensorprodukte gerade die Hilbertschen Modulformen zu verschiedenen Gewichten sind. Vielleicht kann man auch noch was über die Tatekurve sagen?

Im wesentlichen wir dies in Goren, V.1, V.2. erklärt. Leider ist die Referenz nicht wirklich vollständig. Hier müssten also einige Definitionen gewälzt werden. **Aber:** das hört sich jetzt schlimmer an, als es ist. Falls am Ende noch Zeit ist, könnten einige Ausblicken folgen.

Lit.: *Goren*, III.5–III.6., V.1, V.2, *Hida*, 4.1.1.-4.1.3

J. Heinloth

05.07.05 **13. N.N.**

Lit: *N.N.*

N.N.

12.07.05 **14. N.N.**

Lit.: *N.N.*

N.N.

19.07.05 **15. N.N.**

Lit.: *N.N.*

N.N.

Literatur

[De] O. Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes.*

[Fr] E. Freitag, *Hilbert Modular Forms.*

[Ga] P. Garrett, *Holomorphic Hilbert Modular Forms*

[Go] E. Goren, *Lectures on Hilbert Modular Varieties and Modular Forms.*

[Hi] H. Hida, *p-adic modular forms on Shimura varieties.*