IEM, Universität Duisburg-Essen WS 2005/06

Arbeitsgemeinschaft Galoisdarstellungen zu Modulformen

Organisation: G. Böckle, G. Frey, M. Möller Di 10–12 c.t., ES09

Seminarprogramm

Viele wichtige Resultate der Zahlentheorie sind eng mit der arithmetischen Theorie von Modulformen verknüpft. Oft werden klassische Probleme in Termen komplex analytischer Modulformen oder deren L-Funktionen formuliert. Die Lösung der Probleme erfolgt hingegen mit Methoden der arithmetischen Geometrie. Abstrakt gesprochen untersucht man die étale oder kohärente Kohomologie natürlich definierter Garben auf verschiedenen Modulräumen elliptischer Kurven. Ein in gewissem Sinne 'konkreter' Zugang zu dieser abstrakten Theorie sind Galoisdarstellungen. Es gilt der folgende **Satz 1** von Eichler, Shimura, Deligne und Serre:

Sei $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ die q-Entwicklung einer normalisierten Neu- und Hecke-Eigenform zum Führer N und Nebentyp ε. Für jede Primzahl ℓ sei $\sigma_\ell \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ das Bild eines Elements von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$, dessen Bild in $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\ell}/\mathbb{F}_\ell)$ der Frobenius-automorphismus ist. Dann gelten:

(1) Die Koeffizienten a_n, $n \geq 1$, sind ganze algebraische Zahlen und $K_f := \mathbb{Q}(a_n : n \geq 1)$ ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

(2) Zu jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von K_f existiert eine stetige Galoisdarstellung

$$\rho_{f,\mathfrak{p}} \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\widehat{K}_{f,\mathfrak{p}})$$

($\widehat{K}_{f,\mathfrak{p}}$ der Komplettierung von K_f an $\mathfrak{p}$), welche an allen zu $N\mathfrak{p}$ teilerfremden Primzahlen ℓ unverzweigt ist, und eindeutig durch folgende Bedingung charakterisiert ist: Für alle zu $N\mathfrak{p}$ teilerfremden Primzahlen ℓ gilt

$$\mathrm{Spur}(\rho_{f,\mathfrak{p}}(\sigma_\ell)) = a_\ell \quad \textit{und} \quad \det(\rho_{f,\mathfrak{p}}(\sigma_\ell)) = \varepsilon(\ell).$$

Ziel des Seminars soll es sein, den Beweis dieses Satzes zu verstehen. Die späteren Vorträge wollen auch mögliche Anwendungen des Satzes aufzeigen. Aufgrund der Konstruktion der Galoisdarstellungen vermöge étaler Kohomologie (für Formen vom Gewicht mindestens 2) erhält man aus den Weil-Vermutungen (Satz von Deligne) auch die Vermutung von Ramanujan-Petersson über das Wachstum der Koeffizienten von Modulformen.

Mit Hilfe von Satz 1 lässt sich zum Beispiel die Vermutung von Shimura-Taniyama wie folgt formulieren: Zu jeder elliptischen Kurve E gibt es eine Modulform f_E mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, so dass für jede Primzahl p gilt: Die p-adische Darstellung von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf den p-potenz-Torsionspunkten von E stimmt mit $\rho_{f_E,p}$ überein. Dabei stimmt der Führer N_E von E mit dem Führer der Modulform überein. Aus dieser Vermutung (Satz von Wiles, Taylor, Diamond, Conrad, Breuil) lässt sich recht schnell die Vermutung von Fermat herleiten. Auch die Vermutung von Serre lässt sich nur formulieren und motivieren, wenn Satz 1 bekannt ist.

Wir werden uns im wesentlichen an dem Skript von B. Conrad ([Co]) orientieren, insbesondere Notationen sollten weitgehend daraus übernommen werden. Referenzen ohne weitere Literaturangabe beziehen sich auf dieses Skript. Das Buch von F. Diamond und J. Shurman enthält Teile davon und erfordert weniger Vorkenntnisse.

18.10.05 **1. Einführung (u. Organisatorisches)**
Motivierendes, u.a.: Die Ramanujan-Vermutungen folgen aus den Weil-Vermutungen und dem, was das Seminar beinhaltet. Gebhard Böckle

25.10.05 **2. Eichler-Shimura-Isomorphismus: Aussage**
Ziel ist die Konstruktion der Abbildung von Spitzenformen in eine parabolische Eichler-Kohomologiegruppe. Der Beweis erfolgt im nächsten Vortrag, hier sollen vielmehr die Begriffe bereitgestellt werden - klassisch und in der später benötigten kohomologischen Sprechweise. Im einzelnen:
Modulformen; Spitzen, reguläre und irreguläre; q-Entwicklung; obere Halbebene als Modulraum; Kodaira-Spencer-Abbildung; Tate-Kurve, wenn möglich.
Lit.: [Co] §1, [BaNe] §1 Jan Christian Rohde

08.11.05 **3. Eichler-Shimura-Isomorphismus als Hodge-Struktur**
Hodge-Struktur auf der Eichler-Kohomologie, Beweis des Isomorphismus, vermutlich am besten nach [BaNe]. Siehe auch [Zu] für einen noch allgemeineren Zugang.
Lit.: [Co], §1, [BaNe] Kay Ruelling

??.11.05 **4. Intermezzo: Variation der Hodgestruktur über Hilbertschen Modulvarietäten**
Lit.: –. Eckart Viehweg

15.11.05 **5. $\Gamma_1(N)$ und Modulschemata für elliptische Kurven**
Level-Strukturen allgemein, Konstruktion der universellen Familie über der komplettierten Modulkurve. Spätestens hier wird man was zu Tate-Kurve sagen müssen, wenn dazu in Vortrag 2 nichts vorkam.
Die Def. 2.2.4.1 in [Co] und die Sichtweise von Modulformen auf der folgenden Seite sollten formuliert werden.
Lit.: [Co] 2.2.1, 2.2.2, 3.2.1, evtl. auch §4.2 Oscar Ledesma

22.11.05 **6. Hecke-Operatoren, klassisch und geometrisch**
Hecke-Operatoren sollten klassisch, und auch in der Sichtweise S. 143 f. in [Co] vorgestellt und verglichen werden (Thm. 2.2.4.2). Hauptpunkt ist die kohomologische Version via $\Gamma_1(N, p)$-Levelstrukturen (§2.3.1). Mit Hilfe des Eichler-Shimura-Isomorphismus sieht man dann, dass beide Sichtweisen das gleiche liefern (Thm. 2.3.2.1)
Lit: [Co], §2.2.4, §2.3
Phung Ho Hai

29.11.05 **7. Hecke-Algebra, Peterson-Skalarprodukt, Neuformen**
Das Petersson-Skalarprodukt ist ein Cup-Produkt (§2.3.3, insb. Thm. 2.3). Die Kommutativität der Hecke-Algebra (Thm. 2.3.4.1), Atkin-Lehner-Involution (§2.3.6). Eigen- und Neuformen (§2.3.7), schließlich wollen wir ja zu Neuformen Galoisdarstellungen assoziieren.
Lit: [Co],§2.3, §2.4 Björn Buth

06.12.05 **8. Gewicht 2, Teil I**
Der Vortragende sollte den Hauptsatz für Gewicht 2 Thm. 3.2.3.1 beweisen sowie die Variante Thm. 3.2.3.3 beweisen und dabei Thm. 3.3.1.1 (Eichler-Shimura-Relationen) importieren.
Lit.: [Co] §3 Stefan Kukulies

13.12.05 **9. Gewicht 2, Teil II: Eichler-Shimura-Relationen**
Erstes Ziel ist der Beweis dieser Relationen in der Formulierung von Thm. 3.3.1.1 in [Co].
Im zweiten Teil sollte klargemacht werden, welche Objekte man mit welchen

Strukturen versehen muss, damit das Verfahren auch für höheres Gewicht klappt, siehe das Meta-Theorem 4.1.3.1 in [Co]. Lit.: [Co] §3, §4.1 Jochen Heinloth

20.12.05 **10. Arithmetische Modelle von Modulkurven**
Fortsetzung des Vortrags 5 - genaueres hängt davon ab, wie weit wir in Vortrag 5 kommen. Ziele:
Modelle von Modulkurven über $\mathbb{Z}[1/N]$, Gestalt der $\mathbb{F}_p$-Fasern
Lit: [Co] §4.2 Irene Bouw

10.01.06 **11. Étale Kohomologie und der Hauptsatz für bel. Gewicht ≥ 2**
Wir importieren/glauben alle benötigten Zutaten der étalen Kohomologie, der zweifelnde Hörer konsultiert § 5.1 in [Co] und z.B. [FrKi]. Der Vortragende versucht obigen Satz 1 (das 'Main Thm. 2' aus [Co]) möglichst vollständig zu beweisen. Nach der Vorbereitung sollte das hauptsächlich bedeuten das Thm. 5.3.3.1 ('Hecke identities') zu beweisen.
Lit: [Co] §5 Marco Wolter

17.01.06 **12. Gewicht 1, Teil I**
Dieser und der nächste Vortrag hängen eng zusammen. Ziel davon ist, zu Hecke-Eigenformen von Gewicht 1 eine Galoisdarstellung in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ zu konstruieren (Thm. 4.1). Der folgende Aufteilungsvorschlag, der vom Vortragendenduo gerne ignoriert werden darf, gestaltet Teil I relativ elementar.
Einführung der Begriffe 'parabolische Modulform' und 'Modulform zu Dirichlet-Charakter', Formulierung vom Thm. 4.1, Beweis folgender Bausteine: Mit Rankins Resultaten und analytischen Methoden kann man die Anzahl der verschiedenen Koeffizienten in der q-Entwicklung einer Eigenform vom Gewicht 1 beschränken (§5). Abschätzung von gewissen Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ (§7).
Lit.: [DeSe] Xavier Taxies

24.01.06 **13. Gewicht 1, Teil II**
Reduktion mod ℓ und Beweis des Thm. 4.1. Sollte Zeit sein, gerne auch noch Thm. 4.6 (Artin-Führer) und Korollare und/oder Thm. 4.10 (Umkehrung der Korrespondenz).
Lit: [DeSe] Marios Magioladitis

31.01.06 **14. Übersichtsvortrag zu 'Anwendungen'**
Gerhard Frey

07.02.06 **15. Weiterführendes**
Hängt vom Interesse der Teilnehmer ab. Vorschläge sind:
Serre-Vermutungen ([Ed])
Galois-Darstellungen auf den Torsionspunkten von $J_0(N)$ ([Ri]) N.N.

Literatur

[BaNe] Bayer, P., Neukirch, J., *On Automorphic Forms and Hodge Theory*, Math. Ann. 257 (1981), 137–155

[Co] Conrad, B., *Modular forms, cohomology and the Ramanujan Conjecture*, derzeit nicht auf der Homepage des Autors, bei den Organisatoren erhältlich

[DiSh] Diamond, F., Shurman J, *A first course in Modular Forms*, Springer (2004), bei den Organisatoren erhältlich

[DeSe] Deligne, P., Serre, J.-P., *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. ENS. 7 No. 4 (1974), 507–530

[Ed] Edixhoven, B., *Serre's conjectures*, in: Modular Forms and Fermat's last theorm (Her.: Cornell, Silverman, Stevens), Springer (1997)

[FrKi] Freitag, E., Kiehl, R., *Étale Cohomology and the Weil conjectures*, Erg. der Math. und ihrer Grenzgeb., Springer (1988)

[Ri] Ribet, K., *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{Q}/Q)$ *arising from modular forms*, Invent. Math. 100 (1990), 431–473

[Zu] Zucker, S., *Hodge theory with degenerating coefficients*, Ann. of Math. 109 (1979), 415–476